



## CÁLCULO DE VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS COMPOSTAS POR VIGAS PELO MÉTODO DA MOBILIDADE

**Luciano C. de Souza**

**Arcanjo Lenzi**

Laboratório de Vibrações e Acústica

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

C.P. 476

CEP 88037-140 – Florianópolis - SC

e-mail: lucianodesouza@hotmail.com

e-mail: arcanjo@emc.ufsc.br

**Resumo.** *Este trabalho mostra a utilização do Método da Mobilidade (MM) na análise de estruturas compostas por vigas, como alternativa ao Método de Elementos Finitos (FEM). O MM é um método analítico, baseado em funções de mobilidade. Essas funções podem ser obtidas de diversas formas: experimental, numérica ou analítica. Neste trabalho as expressões de mobilidade foram obtidas analiticamente, a partir das equações de onda. Analisando uma estrutura com o MM e o FEM, e tendo como parâmetros a precisão da resposta e o tempo de processamento, concluiu-se que o MM é uma alternativa viável para o tipo de estrutura estudado. Análises envolvendo a energia vibratória e o fluxo de potência mostram o potencial desta metodologia.*

**Palavras-chave:** *Método da Mobilidade, Vibrações, Vigas, Fluxo de Energia*

### 1. INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos normalmente usados para análises de problemas de sistemas estruturais dinâmicos e acústicos, como Elementos Finitos (FEM), por exemplo, calculam com precisão respostas referentes aos primeiros modos de vibração. Sistemas dinâmicos, entretanto, podem possuir milhares, ou até milhões, de modos na faixa de frequência de interesse. Para estes casos o método mais utilizado é a Análise Estatística Energética – SEA, que calcula com precisão aceitável os valores médios espaciais das respostas dos vários subsistemas.

O Método da Mobilidade (Cushieri, 1987), também denominado Método da Receptância ou Método da Rigidez Dinâmica, tem sido usado como um método alternativo por tratar-se de um método determinativo e que permite análises ao longo de faixas de frequência mais amplas que aquelas normalmente possíveis por Elementos Finitos. Isto se deve ao menor

número de incógnitas, que são os esforços internos nos pontos ou nas linhas de união entre os componentes que formam o sistema.

Fiates (1996) empregou este método para análise de vibrações de sistemas estruturais formados por vigas acopladas. Os resultados de respostas apresentam ótima concordância com os obtidos por Elementos Finitos. O método mostrou-se ser também rápido de fácil implementação numérica.

Baseado nisto, foi desenvolvido no Laboratório de Vibrações e Acústica da UFSC, um software baseado no Método da Mobilidade, para cálculo de respostas e fluxo de energia em estruturas 3D, formadas por componentes tipo vigas e barras, vibrando por ondas longitudinais, torsionais e de flexão. Este trabalho descreve resumidamente o software e apresenta alguns resultados referentes a resposta em frequência, energia vibratória e fluxo de potência neste tipo de estrutura.

## 2. MÉTODO DA MOBILIDADE (MM)

O MM é baseado na utilização de funções de mobilidade, que são funções de resposta em frequência (FRF) dadas pela razão de uma resposta na forma de velocidade (translação ou rotação) por um carregamento (força ou momento), conforme Eq.(1). A mobilidade pode ser pontual, quando a velocidade e o carregamento são avaliados no mesmo ponto, ou de transferência, quando são avaliados em pontos distintos. As funções de mobilidade podem ser obtidas através de métodos experimentais, numéricos ou analíticos, conforme for mais conveniente.

$$Y = \frac{v}{F} \quad (1)$$

No presente trabalho as funções de mobilidade foram obtidas de forma analítica, partindo-se das equações de onda para vigas (flexão, torção e longitudinal). Para o “elemento viga” foi desenvolvida uma biblioteca de funções analíticas de mobilidade, contendo todas as possíveis disposições de uma viga e tipos de ondas.

Como exemplo, pode-se citar uma viga livre nas extremidades, vibrando por flexão e excitada em uma das extremidades por uma força transversal, como mostra a Figura 1a.



Figura 1 – Exemplos de disposição de vigas para determinação das expressões de mobilidade

A mobilidade pontual correspondente à resposta, na forma de velocidade transversal, do ponto e direção de aplicação da força pode ser calculada pela expressão (Fiates, 1996; Souza, 1999),

$$Y_{LL-11}^{vF-F} = \frac{j\omega}{EI k^3} \frac{\cosh(kL)\sin(kL) - \sinh(kL)\cos(kL)}{\cosh(kL)\cos(kL) - 1} \quad (2)$$

enquanto que a mobilidade de transferência correspondente à velocidade angular do ponto 2 causada pelo momento concentrado M, aplicado no ponto 1, mostrado na Figura 1b, é dada por (Fiates, 1996; Souza, 1999),

$$Y_{AL-12}^{\omega MA-F} = \frac{-j\omega}{EI k} \frac{\cos(kL) + \cosh(kL)}{\cos(kL)\sinh(kL) - \cosh(kL)\sin(kL)} \quad (3)$$

sendo  $j$  a unidade imaginária,  $\omega$  a frequência angular,  $k$  o número de onda de flexão,  $E$  o módulo de elasticidade,  $L$  o comprimento da viga e  $I$  o momento de inércia da seção transversal da viga.

Dezenas de expressões análogas a estas foram desenvolvidas para vigas, referentes a todas as condições possíveis, esforços e deflexões (Souza, 1999)

A aplicação do MM requer que a estrutura seja dividida em subestruturas, preferencialmente na forma de componentes de geometria simples como vigas, para os quais as expressões de funções resposta em frequência podem ser determinadas analiticamente.

Usando o princípio da superposição, pode-se escrever expressões para os deslocamentos nos pontos nos quais o sistema estrutural foi desmembrado. Estas expressões são escritas em função do carregamento externo aplicado a estrutura e em função dos esforços internos, que são as incógnitas a serem determinadas. Obtém-se, assim, um sistema de equações, na forma

$$[Y] \{F_{int}\} = \{F_{ext}\} \quad (4)$$

sendo  $[Y]$  a matriz de mobilidades,  $\{F_{int}\}$  os esforços internos que atuam nas uniões e  $\{F_{ext}\}$  o carregamento externo.

Uma vez conhecida a matriz de mobilidades, pode-se determinar os esforços internos através da Eq. (3). Em seguida, pode-se determinar a resposta em qualquer ponto e de qualquer componente a partir dos esforços que atuam nas extremidades (uniões) deste componente.

Como as funções de mobilidade foram desenvolvidas de forma analítica, após conhecidas as velocidades nas extremidades da viga, pode-se determinar as constantes das equações de onda. Com isso, obtém-se um equação que rege o comportamento completo da viga, e pode-se obter informações, tais como deslocamentos e esforços internos, em qualquer ponto da viga, sem a necessidade de calcular qualquer sistema de equações. Então, a obtenção da resposta em pontos intermediários da viga faz-se por uma discretização após a resolução do sistema de equações.

### 3. DESCRIÇÃO DO SOFTWARE

Utilizando a linguagem de programação C++ foi desenvolvido um programa baseado no MM, denominado VibVig, abreviação de vibrações em vigas. O programa é executado sobre o sistema operacional Windows 32 bits, que pode ser o Windows 95 SR2, Windows 98, Windows NT, ou superior. A Figura 2 mostra o menu principal do VibVig, juntamente com seus comandos.

O VibVig modela estruturas compostas por vigas, num espaço 3D, com a restrição de que as vigas sejam ortogonais umas às outras. A partir desse modelo pode-se obter a resposta da estrutura, para uma faixa de frequência especificada pelo usuário. Análises, tais como a contribuição de cada tipo de onda para a energia vibratória e o cálculo do fluxo de potência, estão disponíveis de maneira facilitada no programa. Também possui opções de saída de resultados do tipo gráfico ou arquivo.

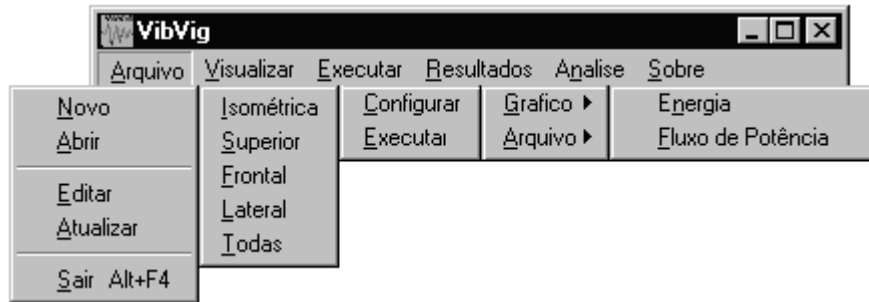


Figura 2 – Menu principal do programa VibVig

#### 4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para ilustrar a aplicação do software foi preparado um modelo da estrutura mostrada na Figura 3. Os resultados foram comparados com os produzidos pelo software de Elementos Finitos ANSYS 5.3, versão universitária.

A estrutura analisada é composta por vigas, com as seguintes características:

- Módulo de Elasticidade:  $E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- Densidade:  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
- Amortecimento estrutural:  $\eta = 0.01$
- Seção transversal:  $h = b = 0.01 \text{ m}$

Os pontos indicam nós e os semicírculos indicam as vigas. Os nós 1 e 10 são engastados. O nó 7 é submetido a uma força de 100 N.

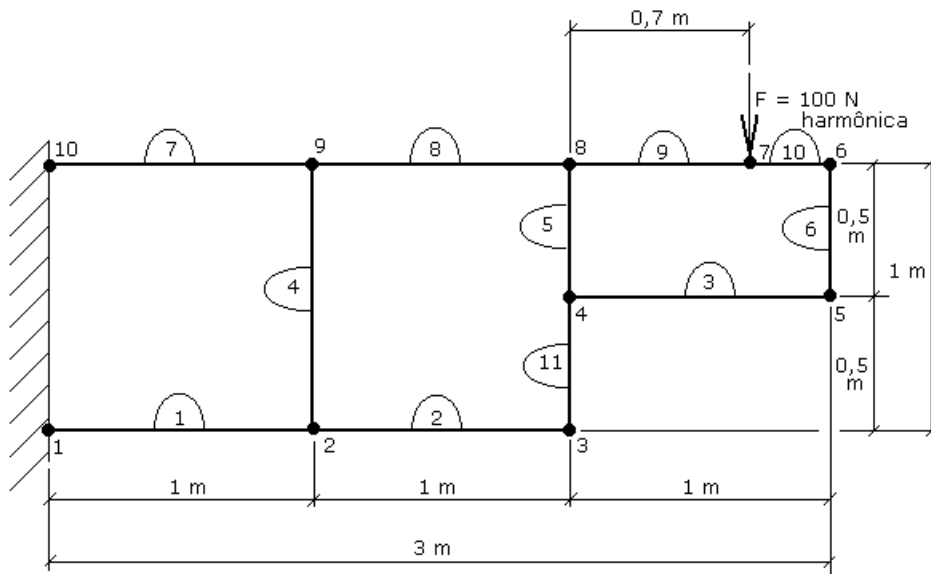


Figura 3 – Estrutura analisada

Na análise por FEM-ANSYS foi utilizado o elemento BEAM3. É um elemento de viga 2D, com três graus de liberdade por nó: deslocamento X e Y e rotação em Z. Para obter-se a resposta da estrutura foi inicialmente realizada uma análise modal, utilizando-se o método de Lanczos, e, em seguida, foi realizada uma análise harmônica utilizando-se o método da superposição modal.

Três análises foram realizadas, com a frequência variando entre 0 e 100 Hz, 500 e 600 Hz e 900 e 1000 Hz. Para cada faixa analisada utilizou-se um tamanho diferente para o FEM-

ANSYS, correspondendo a seis elementos por comprimentos de onda. A Tabela 1 mostra os valores utilizados.

Tabela 1. Parâmetros utilizados no FEM-ANSYS

Faixa de frequência (Hz)	Tamanho do elemento (cm)	Nº de nós
0 - 100	16	60
500 - 600	7	128
900 - 1000	5	169

Como resultados, foram tomados valores de velocidade em pontos da estrutura. As figuras 3, 4 e 5 mostram os resultados, comparando o MM-VibVig e o FEM-ANSYS.

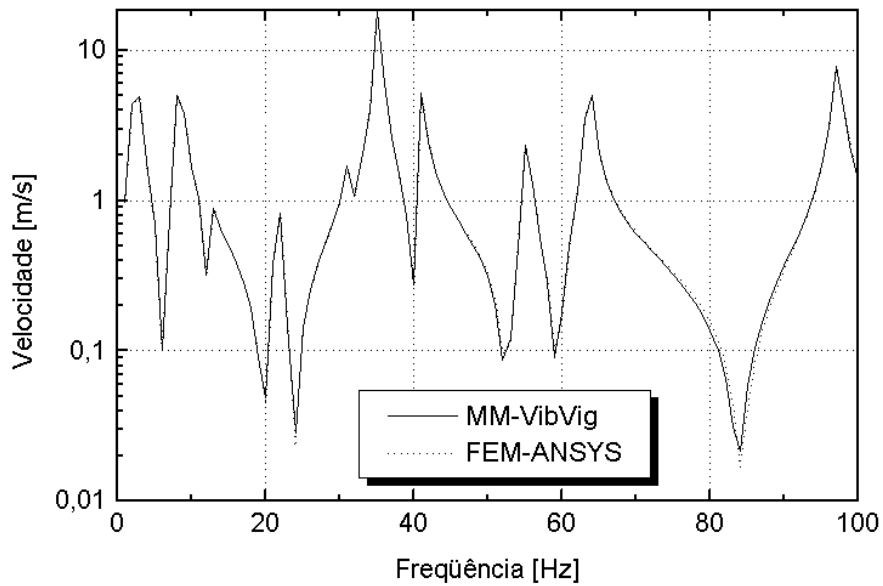


Figura 4 – Velocidade de translação em Y do nó 7

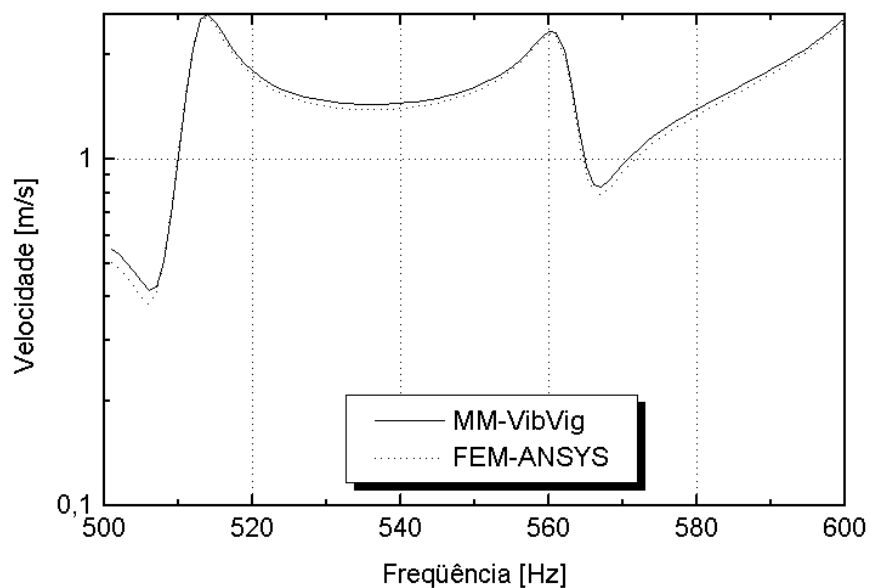


Figura 5 – Velocidade rotacional em Z do nó 5

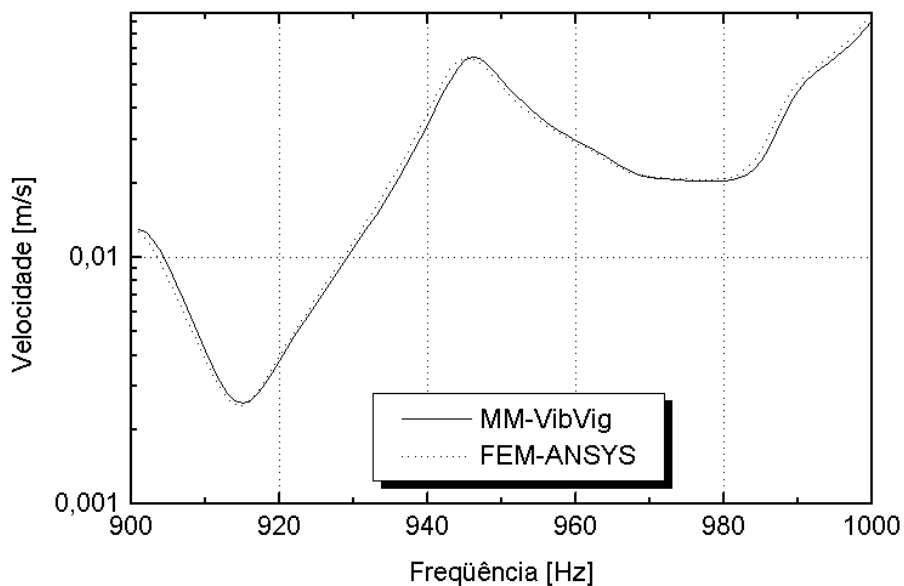


Figura 6 – Velocidade de translação em Y do nó 2

A Figura 6 mostra os tempos de processamento para o MM-VibVig e o FEM-ANSYS. Para o primeiro, o tempo é independente da faixa de frequência. Já para o FEM-ANSYS, a medida que se aumenta a frequência, o comprimento de onda diminui, o tamanho do elemento também diminui a fim de manter-se a média de 6 elementos por comprimento de onda. Com elementos menores, a malha passa a conter mais elementos, tornando os cálculos mais lentos pelo FEM-ANSYS.

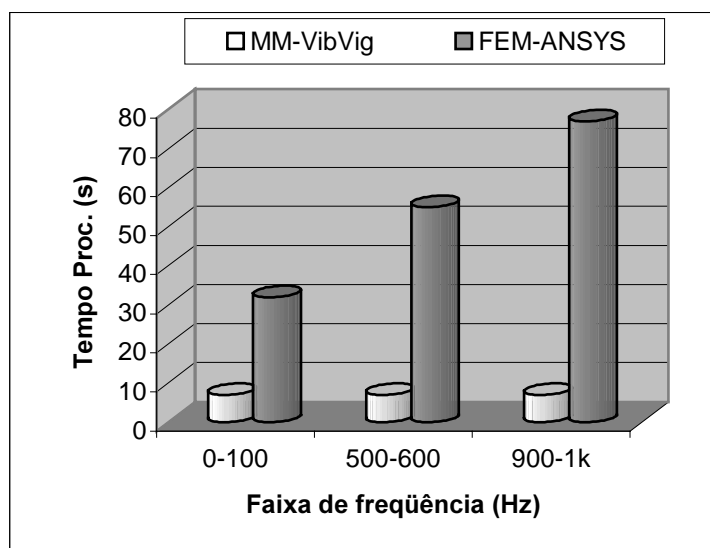


Figura 7 – Gráfico do tempo de processamento

## 5. ANÁLISES DE ENERGIA E DE FLUXO DE POTÊNCIA

O VibVig calcula as funções de mobilidade analiticamente, partindo das equações de onda para vigas. Após calculadas as velocidades nos extremos da viga, pode-se voltar às equações de onda, obtendo as constantes que as caracterizam. Com isso é possível obter a resposta em qualquer ponto da viga, sem a necessidade de se resolver um novo sistema de equações.

Pode-se, por exemplo, calcular o deslocamento transversal em toda extensão da viga simplesmente variando a posição “x” da equação da onda de flexão. Da mesma forma, pode-se obter outras grandezas que dependem da equação da onda, tais como os esforços internos, e grandezas derivadas, tais como a energia e o fluxo de potência.

A Figura 8 mostra a energia para ondas de flexão das vigas 1, 5 e 9 da estrutura analisada no Item 4.

Na Figura 9 está mostrado o fluxo de potência, para a frequência de 7 Hz, para a mesma estrutura.

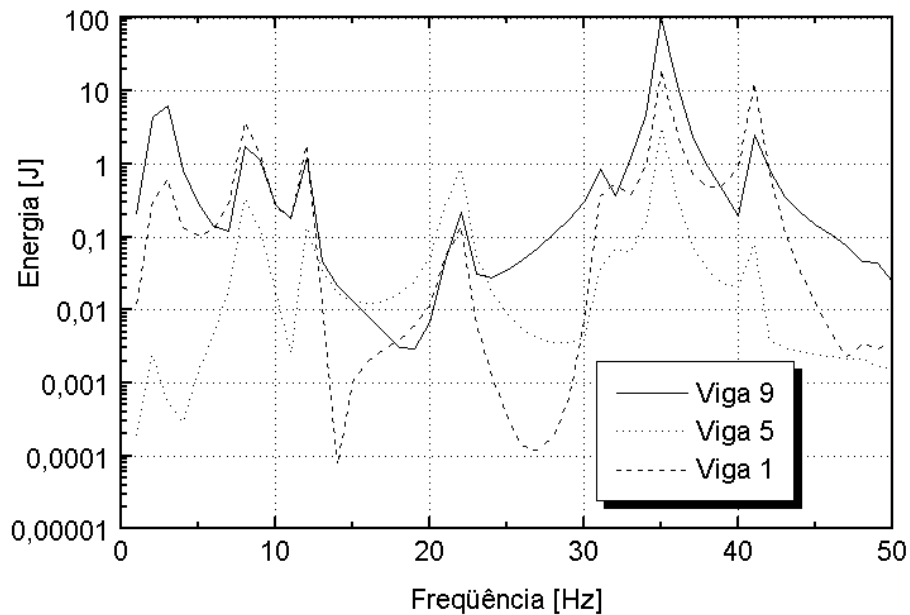


Figura 8 – Gráfico comparativo de energia de onda de flexão

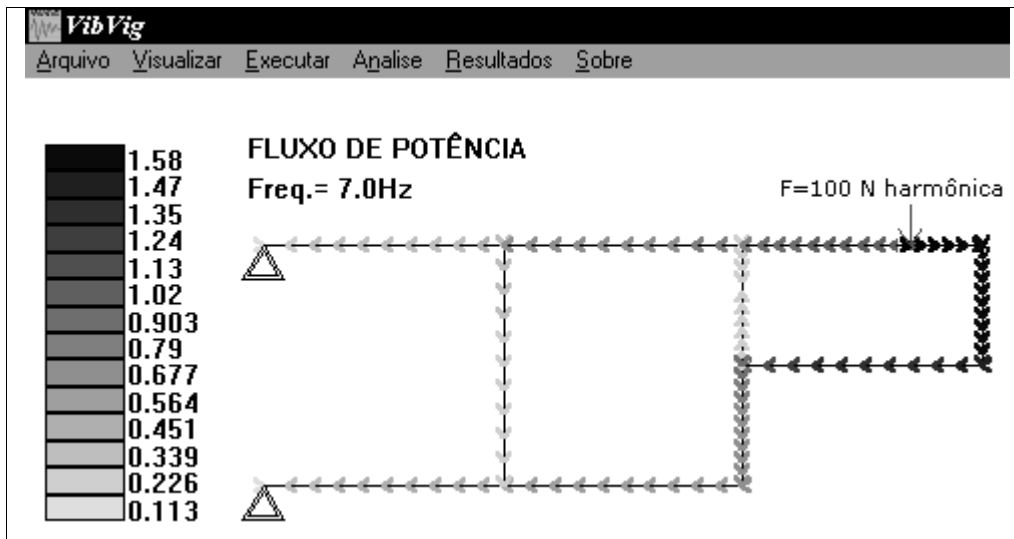


Figura 9 – Fluxo de Potência ao longo da estrutura

## 6. CONCLUSÕES

Analisando as respostas obtidas pelos dois métodos utilizados e seus respectivos tempos de processamento, conclui-se que, para esse tipo específico de estrutura, o Método da Mobilidade constitui numa boa alternativa em relação ao Método de Elementos Finitos. Na

verdade, os resultados do MM correspondem à tendência dos resultados do FEM a medida que se refina a malha. Os tempos de processamento são menores porque o sistema de equação é da ordem do número de vigas na estrutura, enquanto que para o FEM o sistema de equação é da ordem do número de elementos de viga, que aumenta com o aumento da frequência. Além disso, no VibVig foi utilizado como algoritmo de resolução do sistema de equações a Decomposição LU, no qual a quantidade de operações para se resolver o sistema de equações aumenta com o cubo da ordem da matriz, enquanto que o ANSYS utiliza algoritmos específicos e otimizados, e a quantidade de operações aumenta com o quadrado da ordem da matriz. Então, se desenvolvido comercialmente, o MM poderá ser ainda muito mais rápido do que o mostrado neste trabalho.

No presente trabalho o MM foi utilizado para resolver estruturas compostas por vigas, mas o método pode ser expandido para outros elementos, tal como elementos de placa, criando uma ferramenta rápida e precisa para o cálculo de vibrações estruturais.

## REFERÊNCIAS

- Cuschieri, J. M., 1987, Power Flow as a Complement to Statistical Energy Analysis and Finite Element Analysis, ASME Publication NCA, vol. 3, pp. 55-61.
- Fiates, Fábio, 1996, Análise de Vibrações de Componentes Estruturais Tipo Vigas Acopladas pelo Método da Mobilidade, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Souza, Luciano C. de, 1999, Cálculo de Vibrações pelo Método da Mobilidade, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (fase final de desenvolvimento).

## VIBRATION OF BEAM STRUCTURES USING MOBILITY APPROACH

### ABSTRACT

This work shows an application of the Mobility Approach as an alternative to the Finite Element Method (FEM) for the analysis of vibrations of beam structures. The approach is based on mobility type FRF, which can be determined experimentally, analytically or numerically. In this work FRF for beams were obtained analytically. Response at specific points and the power flowing through the components of a typical structure were calculated and results were compared to those obtained by FEM. The agreement is excellent and the lower computing time showed the Mobility Approach to be an attractive alternative to the FEM.

*Key-words: Mobility Approach, Vibration, Beam, Power Flow*